OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1908. N° 4

RECHERCHES SUR LA MULTIPLICATION DE DEUX INTÉGRALES DÉFINIES PRISES ENTRE DES LIMITES INFINIES

PAR

H. BOHR

Introduction

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions réelles ou complexes de la variable réelle x, et soient d'une part $u(x)$ continue pour $0 \leqq x \leqq a$, et de l'autre $v(x)$ continue pour $0 \leqq x \leqq b$, a et b étant deux nombres positifs et finis quelconques; nous aurons, comme l'on sait, l'équation suivante:

$$\int_0^a u(x)\,dx \,.\int_0^b v(x)\,dx = \iint_{R a,b} u(x)\,v(y)\,d\omega \tag{1}$$

où le champ $R_{a,b}$ de l'intégrale double du second membre sera un rectangle aux angles opposés (0, 0), (a, b), ayant ses côtés parallèles aux axes du système de coordonnées rectangulaires X-Y, tandis que $d\omega$ représentera l'élément du plan X-Y.

Considérons maintenant deux intégrales convergentes

$$\int_0^\infty u(x)\,dx \text{ et } \int_0^\infty v(x)\,dx$$

— dans ce qui suit nous entendrons toujours, à moins que le lecteur ne soit informé du contraire, par $u(x)$ et par $v(x)$ des fonctions continues pour $x \geqq 0$ —; l'équation (1) entraîne immédiatement l'équation suivante:

$$\int_0^\infty u(x)\,dx \,.\int_0^\infty v(x)\,dx = \lim_{a=\infty,\; b=\infty} \int_0^a u(x)\,dx \,.\int_0^b v(x)\,dx$$

$$= \lim_{a=\infty,\; b=\infty} \iint_{Ra,b} u(x)\,v(y)\,d\omega \tag{2}$$

où le passage à la limite du dernier membre devra être effectué de manière à faire croître le rectangle $R_{a,b}$ indéfiniment, a et b tendant tous les deux vers ∞.

On sait que dans le cas où les deux intégrales considérées $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$ sont absolument convergentes, en d'autres termes: au cas où $\int_0^\infty |u(x)|\,dx$ et $\int_0^\infty |v(x)|\,dx$ sont convergentes, le théorème exprimé par l'équation (2) peut être généralisé comme il suit:

$$\int_0^\infty u(x)\,dx \,.\int_0^\infty v(x)\,dx = \lim_{S=\infty}\iint_S u(x)\,v(y)\,d\omega\,; \tag{3}$$

dans cette équation le champ S de l'intégrale double est une aire finie quelconque, cohérente ou incohérente, située dans le quart de plan positif, et le passage à la limite doit se faire de telle sorte que le champ S croissant indéfiniment contienne à un certain moment un carré $[(0,0)\text{-}(x,x)]$ qu'on pourra d'ailleurs choisir aussi grand qu'on le voudra.

Ce théorème est d'une grande importance pour l'analyse. Rappelons ici l'application classique qu'en a faite Laplace[1]) pour trouver la valeur de l'intégrale absolument convergente $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Laplace suppose que dans l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx \,.\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{S=\infty}\iint_S e^{-(x^2+y^2)}\,d\omega$$

le champ d'intégration S est un secteur circulaire limité par les axes et par un cercle ayant son centre à l'origine. Cela posé, il trouve facilement la valeur de l'intégrale double. Et si, ensuite, on passe à la limite en faisant croître indéfiniment le rayon du cercle et qu'on extraie la racine carrée, on trouve immédiatement $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Si, au contraire, l'une des deux intégrales convergentes en question $\int_0^\infty u(x)\,dx$ ou $\int_0^\infty v(x)\,dx$ n'est pas absolument convergente mais „semi-convergente“ $(\lim_{x=\infty}\int_0^x |u(x)|\,dx = \infty)$, ou bien, si les intégrales sont toutes les deux „semi-conver-

[1]) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (Paris, 1778).

gentes“, l'équation (3) n'a pas lieu généralement, et même dans les cas où $\iint_S u(x)\,v(y)\,d\omega$ tend vers une valeur limite finie et déterminée, le domaine S croissant indéfiniment d'une manière déterminée, cette valeur limite n'est pas nécessairement égale au produit des deux intégrales $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$.

Abstraction faite du théorème immédiatement évident qu'exprime l'équation (2), théorème qui ne permet probablement pas des applications nombreuses, on n'a pas, que je sache, étudié jusqu'ici les rapports qui auront lieu (dans le cas de deux intégrales dont l'une au moins est semi-convergente) entre le produit $\int_0^\infty u(x)\,dx \,.\int_0^\infty v(x)\,dx$ et l'intégrale double $\iint_S u(x)\,v(y)\,d\omega$, quand nous faisons croître le domaine S à l'infini autrement que par l'accroissement du rectangle $R_{a,b}$.

Dans ce qui suit je me propose de montrer que pour ces rapports il existe dans le cas où l'une des deux intégrales est absolument convergente, l'autre semi-convergente, et aussi dans le cas de deux intégrales semi-convergentes, une suite de théorèmes généraux. Ensuite nous donnerons quelques exemples des applications à faire des dits théorèmes dans le domaine de l'„analyse“.

CHAPITRE I

Multiplication de deux intégrales dont l'une est absolument convergente, l'autre semi-convergente.

Théorème I. Soient $U = \int_0^\infty u(x)\,dx$ une intégrale absolument convergente et $V = \int_0^\infty v(x)\,dx$ une intégrale semi-convergente; on aura, en posant

$$w(x) = \int_0^x u(y)\,v(x-y)\,dy,$$

$\int_0^\infty w(x)\,dx$ convergente et de valeur $U.V$ ou bien, en réunissant: $\int_0^\infty u(x)\,dx \,.\int_0^\infty v(x)\,dx = \int_0^\infty dx \,.\int_0^x u(y)\,.\,v(x-y)\,dy$.

Démonstration: Posant $s(x) = \int_0^x u(y)\,dy$, $t(x) = \int_0^x v(y)\,dy$ et

$$W(x) = \int_0^x w(y)\,dy,$$

il viendra: $s(x)\,.\,t(x) = W(x) + \int_0^x u(y)\left(\int_{x-y}^{x} v(z)\,dz\right) dy$ [1]) $\quad$ (1)

ce qui donnera:

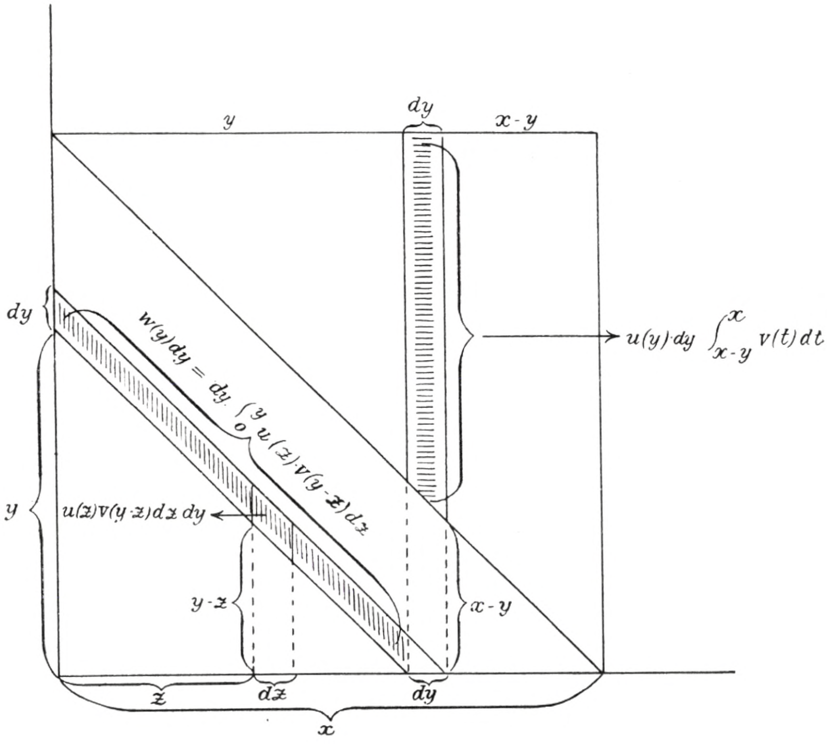

Fig. I.

[1]) L'équation (1), identique pour $x = 0$, se vérifie à l'aide d'une différentiation. Il vient: $s(x)\,.\,v(x) + u(x)\,.\,t(x) = w(x) + u(x)\,.\,t(x) + \int_0^x u(y)\,v(x)\,dy - \int_0^x u(y)\,v(x-y)\,dy = u(x)\,t(x) + v(x)\,s(x)$ (identité). La figure représentée ci-contre (fig. I) donne l'interprétation géométrique de l'équation (1).

$$|U.V - W(x)| \leqq |U.V - s(x).t(x)| + |s(x).t(x) - W(x)| \leqq$$

$$|U.V - s(x).t(x)| + \int_0^x |u(y)|.\left|\int_{x-y}^x v(z)\,dz\right| dy \leqq$$

$$|U.V - s(x).t(x)| + \int_0^x |u(y)|.\varepsilon(x-y)\,dy,$$ où $\varepsilon(x)$ désigne la limite supérieure de $\left|\int_{x+t}^{x+z} v(y)\,dy\right|$ pour $z \geqq t \geqq 0$, $\varepsilon(x)$ décroissant à mesure qu'augmente x: $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0$, d'où

$$|U.V - W(x)| \leqq |U.V - s(x)t(x)| + \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\int_0^{\frac{x}{2}} |u(y)|\,dy +$$
$$\varepsilon(0)\int_{\frac{x}{2}}^x |u(y)|\,dy.$$

En désignant d'autre part par $\varepsilon_1(x)$ la limite supérieure de $\int_x^{x+z} |u(y)|\,dy$, $\varepsilon_1(x)$ allant toujours en décroissant: $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon_1(x) = 0$, il viendra:

$$|U.V - W(x)| \leqq$$
$$|U.V - s(x)t(x)| + \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\varepsilon_1(0) + \varepsilon(0)\,\varepsilon_1\left(\frac{x}{2}\right)$$

et par suite:

$$\lim_{x=\infty} |U.V - W(x)| = 0; \quad \lim_{x=\infty} W(x) = U.V$$

c. q. f. d.

Il ressort de la fig. I que $\int_0^z w(t)\,dt = \iint u(x)\,v(y)\,d\omega$, l'intégrale double ayant pour champ la portion du plan X-Y que délimitent les axes des coordonnées et la droite $x + y = z$; le théorème peut donc s'énoncer comme il suit:

Il est permis de multiplier deux intégrales définies, dont l'une est absolument convergente et l'autre semi-convergente, en prenant pour courbe limite $x + y = z$, si nous entendons par là qu'en intégrant $f(x, y) = u(x)v(y)$ dans la partie du quart de plan positif que limite la droite $x + y = z$, le résultat obtenu par l'intégration aura, pour z croissant à l'infini, une valeur limite égale au produit $U.V$ des intégrales considérées.

Le théorème I peut se généraliser jusqu'à comprendre des cas où nous avons des courbes d'un type général déterminé limitant, avec les axes des coordonnées, le champ de l'intégrale double $\iint u(x)\,v(y)\,d\omega$ dans le plan X-Y. Pour établir de telles généralisations nous avons à démontrer le théorème suivant:

Théorème II. Soit $U = \int_0^\infty u(x)\,dx$ une intégrale absolument convergente et soit $V = \int_0^\infty v(x)\,dx$ une intégrale semi-convergente; l'intégrale de $f(x, y) = u(x)\,v(y)$, qui a pour champ la partie du plan que délimitent les axes et une courbe continue n'ayant avec une ordonnée quelconque qu'un seul point d'intersection au plus, aura une valeur limite égale à $U.V$ lorsque la courbe s'éloigne à l'infini de sorte qu'elle renferme finalement un carré quelconque qu'on pourra d'ailleurs choisir aussi grand qu'on le voudra.

Voici la démonstration de ce théorème. Les notations employées sont celles dont nous nous sommes déjà servi en démontrant le théorème I.

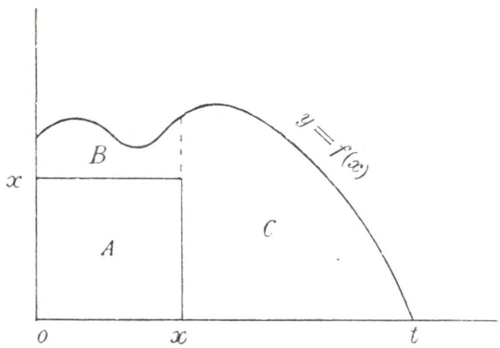

Fig. II.

$$A = s(x)\,.\,t(x),\ \lim A = U\,.\,V,$$

$$B = \int_0^x u(y)\,.\left(\int_x^{f(y)} v(z)\,dz\right)dy,$$

$$|B| \leqq \varepsilon(x)\int_0^x |u(y)|\,dy \leqq \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(0),\ \lim B = 0,$$

$$C = \int_x^t u(y) \left(\int_0^{f(y)} v(z)\, dz \right) dy,$$

$$|\, C \,| \leqq \varepsilon(0) \,.\, \int_x^t |\, u(y) \,|\, dy \leqq \varepsilon(0) \,.\, \varepsilon_1(x), \quad \lim C = 0,$$

$$\lim (A + B + C) = U \,.\, V, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il ressort avec évidence de cette démonstration que la restriction à laquelle sont assujetties les courbes considérées dans le théorème I par opposition à celles du cas de deux intégrales absolument convergentes — restriction exigeant que les courbes ne soient coupées par aucune ordonnée en plus d'un point —, peut être atténuée jusqu'à admettre que chacune des courbes soit au plus traversée par une ordonnée un nombre fini ($< N$ (Const.)) de fois. Il est clair que la restriction atténuée n'est pas essentiellement différente de la restriction première.

CHAPITRE II

Multiplication de deux intégrales semi-convergentes.

Théorème III. Soient $U = \int_0^\infty u(x)\, dx$ et $V = \int_0^\infty v(x)\, dx$ deux intégrales semi-convergentes et soit $w(x) = \int_0^x u(y)\, v(x-y)\, dy$; l'intégrale $\int_0^\infty w(x) dx$ aura la valeur $U . V$, pourvu qu'elle soit convergente [1]).

Au lieu de donner ici une démonstration particulière de ce théorème, nous allons énoncer un théorème beaucoup plus général (théorème IV, p. 220) dont on pourra déduire le théorème III comme un cas particulier.

En vue du développement qui va suivre nous aurons tout d'abord à généraliser la notion de convergence en introduisant celle de sommabilité. A cet effet, nous introduirons la définition que voici:

[1]) Nous donnerons plus loin (p. 224) un exemple où l'intégrale $\int_0^\infty w(x)\, dx$ est convergente et un autre exemple où elle ne l'est pas.

Posant $s(x) = \int_0^x u(y)\,dy$, on dira que l'intégrale $\int_0^\infty u(x)dx$ est sommable avec la valeur de sommabilité s toutes les fois que $\frac{1}{a}\int_0^a s(x)\,dx$ $(a > 0)$ aura, pour $a = \infty$, la valeur limite s.

Or il est bien connu que $\lim\limits_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a s(x)\,dx = s$ lorsque $\lim\limits_{x=\infty} s(x) = s$ tandis que $\frac{1}{a}\int_0^a s(x)\,dx$ peut avoir une valeur limite s sans que $s(x)$ ait pour $x = \infty$ une valeur limite finie et déterminée [1]); il s'ensuit que la notion de sommabilité représente une application généralisée de la notion de convergence, en d'autres termes: toute intégrale convergente de valeur s est sommable avec la valeur s, tandis que la réciproque n'a pas lieu.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème IV. Soient $U = \int_0^\infty u(x)\,dx$ et $V = \int_0^\infty v(x)\,dx$ deux intégrales semi-convergentes; on aura, en posant $w(x) = \int_0^x u(y)\,v(x-y)\,dy$, $\int_0^\infty w(x)\,dx$ toujours sommable et de valeur $U.V$, c'est-à-dire que, en posant $W(x) = \int_0^x w(y)\,dy$, $\lim\limits_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a W(x)\,dx = U.V$ ou bien, en réunissant:

$$\int_0^\infty u(x)\,dx \,.\, \int_0^\infty v(x)\,dx = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a dx \,.\, \int_0^x dy \,.\, \int_0^y u(z)\,.\,v(y-z)\,dz.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, le théorème III peut être déduit immédiatement du théorème IV dont il n'est qu'un cas particulier, car la valeur de sommabilité d'une intégrale convergente étant égale à la valeur de l'intégrale, $\int_0^\infty w(x)\,dx$ est évidemment égale à $U.V$ pourvu qu'elle soit convergente.

[1]) Soit par exemple $s(x)$ une fonction périodique continue de période p. Il est aisé de démontrer que $\lim\limits_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a s(x)\,dx$ existe toujours et que cette limite est égale à $\frac{1}{p}\int_x^{x+p} s(x)\,dx$, c.-à-d. à la fonction intégrée dans le champ d'une période et divisée ensuite par la longueur de la période p.

Avant de passer à la démonstration du théorème IV il nous faut énoncer un théorème auxiliaire:

Soient $\lim\limits_{x=\infty} s(x) = U$ et $\lim\limits_{x=\infty} t(x) = V$, nous aurons, $t(x)$ et $s(x)$ étant continues pour $x \geqq 0$, $\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x s(y) \, . \, t(x-y)\, dy = U \, . \, V$.

Démonstration:

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(y) \, . \, t(x-y)\, dy = \frac{1}{x}\int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\, t(x-y)\, dy + \frac{1}{x}\int_0^{\frac{x}{2}} t(y) s(x-y)\, dy$$

$$\frac{1}{x}\int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\, t(x-y)\, dy = \frac{1}{2}\left[V \cdot \left(\frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\, dy\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\big(t(x-y) - V\big)\, dy\right].$$

Dans cette expression la quantité $\frac{1}{\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\, dy$ a pour valeur limite U, $\lim\limits_{x=\infty} s(x)$ étant égale à U; la valeur limite de $\frac{1}{\frac{x}{2}}\int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\big(t(x-y) - V\big)\, dy$ est égale à zéro, car $|s(y)|$ est moindre que Const. pour tous les y, et, en faisant x suffisamment grand, nous aurons, pour tous les y compris entre 0 et $\frac{x}{2}$, $|t(x-y) - V| < \varepsilon$, où ε désigne une quantité aussi petite qu'on le voudra. On aura donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \cdot \int_0^{\frac{x}{2}} s(y)\, t(x-y)\, dy = \frac{1}{2}\, U \, . \, V$$

et, par un raisonnement tout à fait analogue:

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_0^{\frac{x}{2}} t(y)\, s(x-y)\, dy = \frac{1}{2}\, U \, . \, V.$$

Donc:

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\int_0^x s(y)\, t(x-y)\, dy = 2 \cdot \frac{1}{2} U \, . \, V = U \, . \, V$$

c. q. f. d.

Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème IV:

$$U = \int_0^\infty u(x)\, dx\,, \quad V = \int_0^\infty v(x)\, dx\,, \quad s(x) = \int_0^x u(y)\, dy\,,$$

$$t(x) = \int_0^x v(y)\,dy, \quad w(x) = \int_0^x u(y)\,v(x-y)\,dy;$$

$$W(x) = \int_0^x w(y)\,dy = \int_0^x u(y)\,t(x-y)\,dy, \quad (1)^1)$$

$$\int_0^a W(x)\,dx = \int_0^a t(x)\,s(a-x)\,dx \quad (2)^1);$$

$$\lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a W(x)\,dx = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a t(x)\,s(a-x)\,dx = U\,.\,V$$

c. q. f. d.

Dans les intégrales considérées jusqu'ici nous avons supposé, pour plus de simplicité, que les fonctions à intégrer, $u(x)$ et $v(x)$, étaient continues pour $x \geqq 0$. En vue du développement qui va suivre, nous ferons remarquer que le théorème IV — aussi bien que tous les théorèmes précédents — a lieu également pour deux intégrales $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$ dans lesquelles $u(x)$ et $v(x)$, sont continues pour $x > 0$ mais infinies au point $x = 0$ de manière toutefois que $\int_0^a |u(x)|\,dx = \lim\limits_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^a |u(x)|\,dx$ et $\int_0^a |v(x)|\,dx = \lim\limits_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^a |v(x)|\,dx$ existent (a étant un nombre positif et fini quelconque)[2]).

Voici quelques exemples des applications à faire, dans le domaine de l'analyse, des théorèmes précédemment établis.

Premier exemple: A l'aide du théorème IV on peut trouver d'une manière bien simple la valeur de l'intégrale semi-convergente $\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx$. Posons, pour obtenir le carré de l'intégrale en question, $u(x) = v(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$; nous aurons, $w(x)$

[1]) (1) et (2) se démontrent par différentiation. On aura, respectivement, les identités $w(x) = u(x)\,.\,t(0) + \int_0^x u(y)\,v'(x-y)\,dy = w(x)$ et

$$W(a) = t(a)\,s(0) + \int_0^a t(x)\,u(a-x)\,dx = \int_0^a u(x)\,t(a-x)\,dx = W(a).$$

[2]) En examinant plus en détail les démonstrations ci-dessus données des théorèmes I, II, III, IV, on voit aisément que ces démonstrations restent valables dans les cas où $u(x)$ et $v(x)$ ont, dans le point 0, des singularités comme celle dont nous venons de parler.

$$= \int_0^x u(y)\,v(x-y)\,dy = \int_0^x \frac{e^{iy}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{e^{i(x-y)}}{\sqrt{x-y}}\,dy = e^{ix} \cdot \int_0^x \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dy$$

$$= e^{ix} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = e^{ix} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta} = e^{ix} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, d\vartheta$$

$= \pi \cdot e^{ix}$. On voit que $\int_0^\infty w(x)\,dx = \int_0^\infty \pi e^{ix}\,dx$ n'est pas convergente. Cherchons maintenant la valeur de sommabilité que doit posséder notre intégrale d'après le théorème IV, nous obtenons: $W(x) = \int_0^x w(y)\,dy = \pi \cdot \int_0^x e^{iy}\,dy = \frac{\pi}{i}(e^{ix}-1)$,

$$\int_0^a W(x)\,dx = \frac{\pi}{i}\left[\frac{1}{i}(e^{ia}-1) - a\right], \quad \lim_{a=\infty} \frac{1}{a}\int_0^a W(x)\,dx = \frac{\pi}{i}\,[-1] = \pi i.$$

Il s'ensuit que $\left(\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \pi i = \pi \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}$ d'où, puisqu'on voit immédiatement que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$, le facteur de la composante imaginaire de $\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx$, est de signe positif:

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i).$$

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction (p. 214) la méthode dont nous nous sommes servi ici pour trouver la valeur d'une intégrale, méthode qui consiste à élever l'intégrale au carré et à en extraire ensuite la racine carrée, avait déjà été employée par Laplace cherchant la valeur de l'intégrale absolument convergente $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; mais les théorèmes que nous venons d'établir ont sensiblement étendu le champ d'application de cette méthode et celui de toute méthode analogue. A l'aide de ces théorèmes nous pouvons multiplier les intégrales que nous voudrons, n'étant plus astreints à nous en tenir aux intégrales absolument convergentes.

Considérons maintenant l'exemple plus général de la multiplication des intégrales $\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\alpha-1}\,dx$ et $\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\beta-1}\,dx$, ces intégrales étant, comme l'on sait, semi-convergentes pour $0 < \frac{R(\alpha)}{R(\beta)} < 1$, $R(\gamma)$ représentant la composante réelle de γ.

Nous aurons:

$$w(x) = \int_0^x u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_0^x e^{iy}\, y^{\alpha-1} \,.\, e^{i(x-y)}\, (x-y)^{\beta-1}\, dy$$

$$= e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta),$$

où B designe la fonction béta ordinaire. Il faut distinguer deux cas, savoir:

I) $R(\alpha) + R(\beta) = R(\alpha + \beta) < 1$.

$\int_0^\infty w(x)\, dx = B(\alpha, \beta) \,.\, \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1}\, dx$ est une intégrale convergente. Donc:

$$\int_0^\infty e^{ix}\, x^{\alpha-1}\, dx \,.\, \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\beta-1}\, dx = B(\alpha, \beta) \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1}\, dx.$$

II) $R(\alpha) + R(\beta) \geqq 1$.

$\int_0^\infty w(x)\, dx = B(\alpha, \beta) \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1}\, dx$ n'est pas convergente. Toutefois, d'après le théorème IV, l'intégrale est sommable avec la valeur $\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha-1}\, dx \,.\, \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\beta-1}\, dx$.

Posant, en particulier, dans le cas II, $\alpha + \beta = 1$, ce qui nous donne pour l'intégrale non convergente $\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha+\beta-1}\, dx = \int_0^\infty e^{ix}\, dx$ une valeur de sommabilité très facile à calculer (la quantité $B(\alpha, \beta)$, qui est indépendante de x, peut être négligée dans les calculs, étant partout mise en facteur), il viendra:

$$W(x) = \int_0^x e^{ix}\, dx = \frac{1}{i}\,(e^{ix} - 1),$$

$$\lim_{a=\infty} \frac{1}{a} \int_0^a W(x)\, dx = \lim_{a=\infty} \frac{1}{a \,.\, i} \left[\frac{1}{i}\,(e^{ia} - 1) - a\right] = -\frac{1}{i} = i$$

et par suite:

$$\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\alpha-1}\, dx \,.\, \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\beta-1}\, dx = i B(\alpha, \beta).$$

Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ notre intégrale se réduit à celle que nous avons traitée plus haut (p. 222).

L'intégrale $\varphi(\gamma) = \int_0^\infty e^{ix} x^{\gamma-1}\,dx$ étant dans son région de convergence une fonction analytique de γ, nous allons montrer que l'équation fonctionnelle $\varphi(\alpha).\varphi(\beta) = B(\alpha,\beta)\varphi(\alpha+\beta)$, trouvée pour $0 < \frac{R(\alpha)}{R(\beta)} < 1$ et $R(\alpha)+R(\beta) < 1$, peut être utilisée pour la détermination de $\varphi(\gamma)$. Posant $\varphi(\gamma) = \Gamma(\gamma)\psi(\gamma)$ la susdite équation se transforme en celle-ci: $\psi(\alpha).\psi(\beta) = \psi(\alpha+\beta)$, qui entraîne comme conséquence immédiate (la solution $\psi(\gamma) = 0$ n'entrant pas en ligne de compte, puisque nous avons trouvé plus haut $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i)$) $\psi(\gamma) = e^{K.\gamma}$; donc $\varphi(\gamma) = \Gamma(\gamma).e^{K\gamma}$. La valeur de $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ que nous avons trouvée plus haut, à savoir $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.\,e^{\frac{\pi i}{4}}$, nous servira pour la détermination de la constante K; il viendra: $\sqrt{\pi}\,.\,e^{\frac{\pi i}{4}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{K.\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\,.\,e^{\frac{1}{2}K}$; $e^{\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{1}{2}K}$; $K = \frac{\pi i}{2} + 4n\pi i$ (n entier); $\varphi(\gamma) = \Gamma(\gamma).e^{\gamma\left[\frac{\pi i}{2}+4n\pi i\right]}$[1]. Pour obtenir une détermination univoque de K, c'est-à-dire pour trouver la valeur n à employer il convient de faire remarquer que $\int_0^\infty \sin x\,.\,x^{\gamma-1}\,dx$, qui représente pour γ réel entre 0 et 1 le facteur de la composante imaginaire de $\int_0^\infty e^{ix} x^{\gamma-1}\,dx$, se montre immédiatement positif pour toutes ces valeurs de γ. Or $\Gamma(\gamma)$ étant également

[1]) Dans l'intégrale recherchée $\varphi(\gamma) = \int_0^\infty e^{ix}\,.\,x^{\gamma-1}\,dx$ nous supposons naturellement $x^{\gamma-1}$ défini par $e^{(\gamma-1)\operatorname{Log} x}$ où $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme réel du x positif compris entre 0 et ∞. Mais si nous déterminons $x^{\gamma-1}$ par $e^{(\gamma-1)(\operatorname{Log} x + 2p\pi i)}$ et que nous fassions dans cette hypothèse $\chi_p(\gamma) = \int_0^\infty e^{ix}\,.\,x^{\gamma-1}\,dx$, nous aurons $\chi_p(\gamma) = \varphi(\gamma)\,.\,e^{2\pi p i.\gamma}$. Le seul point où nous ayons dû tenir compte jusqu'ici de ce fait que nous entendons par $x^{\gamma-1}$ $e^{(\gamma-1)\operatorname{Log} x}$ a été le moment où, pour obtenir la détermination de $\varphi(\frac{1}{2})$, nous avons employé la valeur positive de $\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log} x + 2p\pi i)}$. Or comme $e^{\frac{1}{2}.2(2n)\pi i} = 1$, et que par conséquent $\chi_{2n}(\frac{1}{2}) = \varphi(\frac{1}{2})$ (tandis que $\chi_{2n+1}(\frac{1}{2}) = -\varphi(\frac{1}{2})$), il est clair que la connaissance de la valeur $\varphi(\frac{1}{2})$ ne peut nous fournir la fonction $\varphi(\gamma)$ qu'à un facteur $e^{2\pi i.2ni\gamma} = e^{4\pi i n\gamma}$ près.

positif pour γ réel entre 0 et 1 (de sorte que le signe de la composante imaginaire de $\Gamma(\gamma)e^{\gamma\left[\frac{\pi i}{2}+4n\pi i\right]}$ est déterminé par $\sin\left[\gamma\left(\frac{\pi}{2}+4n\pi\right)\right]$) il faut choisir n de manière que $\sin\left[\gamma\left(\frac{\pi}{2}+4n\pi\right)\right]$ soit positif pour toute valeur de γ réel entre 0 et 1, ce qui implique que n soit égal à zéro. Donc

$$\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\gamma-1}\,dx = \Gamma(\gamma) \,.\, e^{\frac{\pi i \gamma}{2}} \text{ [1]}.$$

Sans entreprendre ici une étude approfondie des questions qui se rattachent à ce sujet, nous allons encore montrer qu'il y a des cas où la notion de sommabilité peut nous être utile pour prolonger une fonction analytique, définie par une intégrale définie, jusqu'à la faire dépasser les limites du domaine où l'intégrale est convergente. Dans les cas de ce genre, on n'a pas eu, jusqu'ici, de moyen pour trouver, par la seule considération de l'intégrale divergente, la valeur de la fonction en dehors de la région de convergence de l'intégrale; on a dû recourir à d'autres représentations de la fonction en question. Nous allons voir qu'à l'aide du théorème IV on peut reconnaître immédiatement que l'intégrale ci-dessus considérée $\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\gamma-1}\,dx$, dont le domaine de convergence est compris entre des droites perpendiculaires à l'axe réel passant par 0 et 1 et qui est dans ce domaine égale a $\Gamma(\gamma) \,.\, e^{\frac{\pi i\gamma}{2}}$, que cette intégrale, disons-nous, est sommable dans la région que délimitent les droites menées par 1 et 2 perpendiculairement à l'axe réel ayant le prolongement naturel de la fonction pour valeur de sommabilité.

On a en effet

I) pour $0 < R(\gamma) < 1$ $$\left(\int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\frac{\gamma}{2}-1}\,dx\right)^2 : B\left(\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}\right) = \int_0^\infty e^{ix} \,.\, x^{\gamma-1}\,dx = \Gamma(\gamma) \,.\, e^{\frac{\pi i\gamma}{2}}$$

[1] La valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{ix} x^{\gamma-1}\,dx$ est déjà connue. Elle peut se trouver à l'aide du théorème fondamental de Cauchy sur l'intégration complexe.

II) pour $1 \leqq R(\gamma) < 2$ $\left(\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\frac{\gamma}{2}-1} dx\right)^2 : B\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$

$=$ la valeur de sommabilité de $\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\gamma-1} dx$.

La fonction du premier membre $\left[\left(\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\frac{\gamma}{2}-1}\right)^2 : B\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\right]$ étant analytique dans tout le domaine où $0 < R(\gamma) < 2$, il s'ensuit immédiatement des équations I et II que $\int_0^\infty e^{ix} \cdot x^{\gamma-1} dx$ a, pour $1 \leqq R(\gamma) < 2$ son prolongement naturel pour valeur de sommabilité. Et comme $\Gamma(\gamma) \cdot e^{\frac{\pi i \gamma}{2}}$ est également analytique dans tout le domaine où $0 < R(\gamma) < 2$, cette valeur de sommabilité est nécessairement $\Gamma(\gamma) \cdot e^{\frac{\pi i \gamma}{2}}$.

Revenons de ces exemples à la considération de deux intégrales semi-convergentes quelconques $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$. Conformément à ce que nous avons trouvé pour la multiplication de deux intégrales dont l'une est absolument convergente, l'autre semi-convergente, nous pouvons ici, en considérant deux intégrales semi-convergentes, généraliser le théorème (théorème IV) qui a lieu pour la multiplication où la courbe limite coïncide avec la droite $x + y = z$ (Const.) jusqu'à lui faire comprendre les cas où les courbes limites du champ d'intégration de l'intégrale double $\iint u(x)\,v(y)\,d\omega$, sont d'un type général déterminé. Nous sommes à même de démontrer à ce sujet le théorème suivant:

Théorème V. Désignons par $\varphi(z)$ et par $\psi(z)$ deux fonctions d'une variable réelle, z, qui soient, pour $z \geqq 0$, continues et constamment croissantes (mettons pour plus de simplicité, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$) et qui admettent, pour $z > 0$, des fonctions dérivées continues, différentes de zéro et, par conséquent, positives: $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$; — définissons en outre une fonction $W(r)$ la valeur qu'on obtient par l'intégration de $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ dans le champ délimité par les axes et par la courbe $\varphi(x) + \psi(y) = r$; la fonction W aura, si elle tend pour $r = \infty$ vers une valeur limite finie et déterminée, la valeur limite $U \cdot V$, et plus généralement: on aura dans tous les cas:

$$\lim \frac{1}{a}\int_0^a W(r)\,dr = U \cdot V.\ ^{1})$$

Posant, en particulier, $\varphi(z) = \psi(z) = z$ le théorème sera évidemment identique au théorème IV.

Démonstration du théorème V:

Transformons les deux intégrales considérées $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(y)\,dy$ — en posant $x = \varphi^{(-1)}(\alpha)$ (la fonction inverse de φ; $\alpha = \varphi(x)$) et $y = \psi^{(-1)}(\beta)$ — en $\int_0^\infty U(\alpha)\,d\alpha$ et $\int_0^\infty V(\beta)\,d\beta$, ce qui nous donne

$$U(\alpha) = u(\varphi^{(-1)}(\alpha))\frac{d\varphi^{(-1)}(\alpha)}{d\alpha} \quad \text{et} \quad V(\beta) = V(\psi^{(-1)}(\beta))\frac{d\psi^{(-1)}(\beta)}{d\beta};$$

le résultat que nous obtiendrons en intégrant la fonction $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ dans le champ du plan X-Y que limite la courbe $\varphi(x) + \psi(y) = r$, sera le même que donne, dans le plan $A . B$, l'intégration de la fonction $F(\alpha, \beta) = U(\alpha) \cdot V(\beta)$ dans le champ limité par la droite $\alpha + \beta = r$. L'identité des résultats est due à ce fait que dans la représentation qui aura lieu le rectangle infiniment petit $d\alpha \cdot d\beta$ du plan $A . B$ répondra à un rectangle infiniment petit $dx \cdot dy$ du plan X-Y de grandeur $\left(\frac{d\varphi^{(-1)}(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\psi^{(-1)}(\beta)}{d\beta}\right) d\alpha \cdot d\beta$. Il s'ensuit que $\iint f(x, y)\,dx \cdot dy$ étendue au champ M du plan X-Y est égale à

$$\iint f(\varphi^{(-1)}(\alpha)),\ \psi^{(-1)}(\beta)\,\frac{d\varphi^{(-1)}(\alpha)}{d\alpha} \cdot \frac{d\psi^{(-1)}(\beta)}{d\beta}\,d\alpha \cdot d\beta = \iint F(\alpha,\beta)d\alpha \cdot d\beta$$

étendue au champ N du plan $A . B$, qui correspond à M. Et comme nous avons démontré plus haut (théorème IV) qu'il est permis de multiplier une intégrale par une autre intégrale (dans l'espèce: $\int_0^\infty U(\alpha)\,d\alpha \cdot \int_0^\infty V(\beta)\,d\beta$) en prenant pour courbe

[1]) Aux cas où $f(x)$ est une fonction continue et où $\lim\limits_{a=\infty} \frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)\,dx$ est égale à F, nous dirons dans ce qui suit, pour plus de simplicité, que $f(x)$ a, pour $x = \infty$, la valeur limite généralisée F. Le théorème V peut alors s'exprimer ainsi: $W(r)$ a pour valeur limite généralisée le produit $U . V$.

limite la droite $\alpha + \beta = r$, nous en pouvons conclure immédiatement à la validité du théorème V portant sur la multiplication qui prend pour courbe limite $\varphi(x) + \psi(y) = r$.[1])

Nous allons faire application du théorème V en nous en servant pour trouver la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$. Posant $u(x) = v(x) = e^{ix^2}$ — (cherchant le carré de $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$) — et mettant $\varphi(z) = \psi(z) = z^2$ — (multipliant en prenant des cercles $x^2 + y^2 = r$ pour courbes limites) — on obtient, en employant des coordonnées polaires (ρ, θ):

$$W(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta . \int_0^{\sqrt{r}} \rho d\rho . e^{i(\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta . \int_0^{\sqrt{r}} \rho d\rho . e^{i\rho^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2i} (e^{ir} - 1).$$

On voit que $W(r)$ n'a pas de valeur limite ordinaire pour $r = \infty$. La valeur limite généralisée de $W(r)$ est, on le reconnaît immédiatement, $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2i}(-1) = \frac{\pi i}{4}$, e^{ir} ayant sa valeur limite généralisée égale à zéro. Nous avons donc $\left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx\right)^2 = \frac{\pi i}{4}$ d'où, le signe de la racine carrée extraite étant facile à trouver, $\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{\pi \sqrt{2}}{4}(1 + i)$.

D'après le théorème général sur la multiplication de deux intégrales absolument convergentes, théorème qui peut s'exprimer par l'équation (3) (p. 214), aussi bien que d'après les théorèmes relatifs à la multiplication de deux intégrales dont

[1]) La seule condition que nous ayons imposée aux fonctions continues φ et ψ c'était d'avoir pour les valeurs d'argument supérieures à zéro une fonction dérivée différente de zéro. Si nous ne les avons pas assujetties à la même restriction pour $z = 0$, c'est qu'elle n'est pas nécessaire pour notre démonstration. On le voit aisément en se rappelant la remarque que nous avons faite plus haut en ayant en vue ce point justement. Nous disions (p. 222) que le théorème IV avait lieu même si les deux intégrales considérées avaient le point 0 pour point singulier. (La valeur numérique de la fonction était supposée intégrable pour $x = +0$). Il est donc permis d'employer par exemple $\varphi(z) = \psi(z) = z^2$ (multiplier en prenant des cercles $x^2 + y^2 = r$ pour courbes limites) quoique $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

l'une est absolument convergente et l'autre semi-convergente, théorèmes énoncés au chapitre I, l'intégrale double $\iint u(x)\, v(y)\, d\omega$ étendue aux divers champs considérés par les théorèmes en question, a immédiatement $U \,.\, V$ pour valeur limite quand le champ croît indéfiniment.

Par contre, les théorèmes IV et V qui traitent le cas de deux intégrales semi-convergentes, n'impliquent pas que $\iint u(x)\, v(y)\, d\omega$ ait la valeur limite $U \,.\, V$ quand le champ d'intégration croît à l'infini des diverses manières indiqueés par ces théorèmes, mais seulement que la valeur de l'intégrale double „oscille autour de la valeur $U \,.\, V$" de sorte qu'on peut obtenir cette valeur par suite de certaines opérations d'ajustage. Il en résulte qu'en opérant avec les théorèmes IV et V nous ne sommes pas libres de considérer $\iint u(x) v(y)\, d\omega$ — la fonction W — comme fonction de n'importe quelle variable[1]. Dans le cas traité par le théorème V et dans celui du théorème IV qui n'en est qu'un cas particulier, la variable, indépendante, de la fonction W est la valeur de $\varphi(x) + \psi(y)$, constante pour chaque courbe. Or cette quantité n'est pas dans un rapport simple avec l'image géométrique et on pourrait se demander par exemple si le théorème V n'aurait pas lieu tel quel si on regardait la fonction W — l'intégrale double $\iint u(x) v(y)\, d\omega$ étendue au champ limité par la courbe $\varphi(x) + \psi(y) = \text{Const.}$ — comme fonction de l'abscisse, que découpe la courbe. Un problème qui s'impose à quiconque voudra approfondir ce sujet, est celui des modifications déterminées dans une intégrale sommable par les changements de la variable indépendante. Les questions qui s'y rattachent ont été traitées par Cesàro dans un mémoire intitulé: Contribution à la théorie

[1]) Remarquons à titre d'exemple que, considérée comme fonction de x, $e^x \cos(e^x)$ a la valeur limite généralisée $0 \,.\left(\lim \frac{1}{a}\int_0^a e^x \,.\, \cos e^x \,.\, dx = 0\right)$ tandis que considérée comme fonction de $y = e^x$ cette même quantité n'a pas de limite généralisée, $\frac{1}{a}\int_0^a y \,.\, \cos y \,.\, dy$ se comportant pour les a infiniment grands comme $\sin a$.

des limites"[1]). Cependant les résultats obtenus par M. Cesàro sont susceptibles d'amplifications assez considérables mais qui n'entreraient pas dans les cadres de la présente étude[2]); je me permettrai seulement de donner ici un théorème que je dois à une application particulière de mes propres résultats au problème traité ci-dessus:

Théorème VI. Soient a, b, m, n des nombres positifs quelconques. L'intégrale double $W(s) = \iint u(x)\,v(y)\,d\omega$ étendue au champ limité par la courbe $ax^m + by^n = r$ aura — si nous prenons pour variable indépendante l'abscisse ou l'ordonnée s découpée par la courbe — la valeur limite généralisée $U.V$, quand r et, par suite, s tendent vers ∞.

Autrement dit: $\lim\limits_{z=\infty} \frac{1}{z}\int_0^z W(s)\,ds = U.V.$

Posant, en particulier, $a = b = 1$, $m = n = 2$, ce théorème énonce que si l'on multiplie en prenant des cercles $x^2 + y^2 = \text{Const.}$, pour courbes limites on peut considérer le rayon du cercle comme variable indépendante.

REMARQUES FINALES.

Abstraction faite des théorèmes V et VI, les propositions ci-dessus données pour la multiplication de deux intégrales $\int_0^\infty u(x)\,dx$ et $\int_0^\infty v(x)\,dx$ forment un ensemble très analogue à celui des théorèmes connus qui ont lieu pour la multiplication de deux séries infinies $\sum\limits_0^\infty u_n$ et $\sum\limits_0^\infty v_n$, théorèmes que nous devons à Mertens, Stieltjes, Abel et Cesàro[3]). En intro-

[1]) Darboux, Bulletin, 1889.

[2]) J'espère pouvoir bientôt publier mes recherches sur cette question.

[3]) Cette analogie devient surtout manifeste si, en multipliant les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ on regarde $u_p \,.\, v_q$ comme une fonction du couple de nombres (p, q) et qu'on se figure les couples de nombres successifs représentés par des points sur le quart de plan positif d'un système de coordonnées rectangulaires.

duisant une nouvelle notion — on pourrait la désigner sous le nom de séries à indices arbitraires — où les séries infinies ordinaires rentreraient comme un cas particulier et dont les intégrales définies représenteraient un cas limite, il devient possible de réunir sous un point de vue commun la multiplication des séries et celle des intégrales. En effet on peut démontrer que les cas considérés par ces théorèmes sont tels qu'on peut établir pour toute la classe de séries à indices arbitraires un nouveau théorème comprenant comme un cas particulier le théorème des séries et comme cas limite le théorème des intégrales. — En opérant avec les séries plus générales à indices arbitraires au lieu des séries infinies ordinaires on obtient de pouvoir se servir d'un procédé parfaitement analogue à la transformation des intégrales définies, on pourra donc, au cas où les deux séries considérées sont semi-convergentes, amplifier la théorie de la multiplication des séries par des théorèmes qui correspondent du tout au tout aux deux théorèmes que nous avons désignés dans ce qui précède comme les théorèmes V et VI.

Nous touchons ici à un sujet qui demanderait des recherches ultérieures; j'espère pour ma part que j'aurai bientôt l'occasion d'y revenir.